BGPE
Bavarian Graduate Program in Economics

BGPE Discussion Paper

No. 33

Horizontale und vertikale Innovationen in einem semi-endogenen Wachstumsmodell mit Kapitalakkumulation

Wolfgang Kornprobst

November 2007

ISSN 1863-5733

Editor: Prof. Regina T. Riphahn, Ph.D.
Friedrich-Alexander-University Erlangen-Nuremberg

BGPE Discussion Paper Series

Horizontale und vertikale Innovationen in einem semi-endogenen Wachstumsmodell mit Kapitalakkumulation*

Wolfgang Kornprobst†

Universität Regensburg

8. November 2007

Zusammenfassung

Im semi-endogenen Wachstumsmodell von Li (2000) findet technischer Fortschritt statt, weil sowohl neue als auch qualitativ bessere Produkte erfunden werden. Allerdings ist Arbeit der einzige Produktionsfaktor in der Ökonomie, es gibt keinen akkumulierbaren Faktor (physisches Kapital). In der vorliegenden Arbeit wird aber argumentiert, dass Kapitalakkumulation eine wichtige Tatsache in der Realität ist. Das Modell von Li (2000) wird deshalb um Kapital als notwendigen Input in der Produktion erweitert, so dass Akkumulation möglich wird. Anders betrachtet wird das wegweisende Romer(1990)-Modell verallgemeinert, in dem die Möglichkeit von Qualitätsverbesserungen bestehender Produkte (vertikale Innovationen) eingeführt wird. Damit kann „kreative Zerstörung" im Schumpeterschen Sinne auftreten. Außerdem werden durch diese Modifikation die Skaleneffekte aus dem Romer(1990)-Modell eliminiert. Schließlich wird gezeigt, dass die „verkürzte Form" des Modells identisch ist zu einem neoklassischen Wachstumsmodell, wie z.B. dem Solow-Modell mit Cobb-Douglas Produktionsfunktion. Es hat aber die mikroökomomische Fundierung bezüglich F&E von semi-endogenen Wachstumsmodellen.

JEL classification: O30, O31, O41
Key words: semi-endogenous growth, Schumpeterian models of growth, Solow model

*University of Regensburg, Department of Economics, Economic Theory, 93 040 Regensburg, Germany, Phone: +49-941-943-2704, Fax: +49-941-943-1971, E-mail: wolfgang.kornprobst@wiwi.uni-r.de

†Für vielfältige und stets verfügbare Hilfe bin ich Lutz Arnold sehr dankbar. Die intensiven Diskussionen mit Christian J. Bauer waren (hoffentlich für uns beide) überaus lehrreich.

1 Einleitung

Seitdem Jones mit seinen zwei äußerst einflussreichen Arbeiten (Jones (1995*b*, 1995*a*)) die endogene Wachstumstheorie wegen der kontra-faktischen Skaleneffekte in diesen Modellen (Niveaugrößen wie die Bevölkerung haben Einfluss auf die langfristige Wachstumsrate) in Frage stellte, konzentriert sich die wachstumstheoretische Forschung auf semi-endogene Modelle („non-scale models"). Das erste Modell aus dieser Klasse stammt von Jones (1995*a*). Jones verallgemeinert die Forschungstechnologie im Modell von Romer (1990) und führt Bevölkerungswachstum ein. Im Steady state ist dann die Wachstumsrate nicht mehr von der Bevölkerungsgröße, sondern von deren (exogener) Wachstumsrate abhängig. Weil die Wachstumsrate nicht mehr einfach zu beeinflussen ist, wie es im Romer-Modell der Fall ist (z.B. durch eine Forschungssubvention), wird das Modell als „semi-endogen" bezeichnet. Zwar „entsteht" der technische Fortschritt – und damit die Quelle langfristigen Wachstums – im Modell, die Wachstumsrate im steady state ist aber nur von Größen abhängig, die außerhalb des Modells bestimmt werden und somit exogen sind.

Li (2000) hat ein semi-endogenes Wachstumsmodell entwickelt, in dem vertikale und horizontale Innovationen stattfinden. Er verknüpft die beiden Grundmodelle von Grossman & Helpman (1991*a*), das Varietätenmodell aus Kapitel 3 und das Qualitätenmodell aus Kapitel 4 (bzw. das Qualitätenmodell aus Grossman & Helpman (1991*b*)). Somit gibt es zwei Forschungssektoren. In einem Sektor erfinden Firmen komplett neue Produkte, im anderen werden bestehende Produkte verbessert. Allerdings gibt es in diesem Modell auch wieder kein physisches Kapital. Das vorliegende Modell erweitert das ursprüngliche Modell von Li (2000) und integriert Kapitalakkumulation. Außerdem wird im Vergleich zum Modell von Li (2000) der Prozess der Qualitätsverbesserung geändert. Bei Li (2000) muss der Qualitätsführer in einem Sektor eine Lizenzgebühr an den ursprünglichen Erfinder der Varietät abführen. Eine neue Varietät wird damit niemals wertlos, egal wie viele Qualitätsverbesserungen seit der Produkteinführung bereits stattgefunden haben. Das würde beispielsweise bedeuten, dass die PC-Hersteller *Dell* oder *Hewlett Packard* eine Gebühr an den Erfinder des Computers, das Unternehmen *Xerox*, zahlen müssten. Oder drastischer: *Toyota* müsste pro verkauften Wagen eine Lizenzgebühr an die Erben von Carl Benz, den

Erfinder des Automobils, zahlen. Wenngleich es durchaus vorkommen mag, dass Lizenzierung für ähnliche Produkte möglich ist, scheint es doch eher die Ausnahme als die Regel zu sein. Deshalb wird hier von dieser Annahme abgerückt. Neue Qualitäten dürfen ohne Lizenz des ursprünglichen Erfinders der Varietät vertrieben werden, es findet eine vollständige Gewinnverlagerung zum neuen Qualitätsführer hin statt.

Ein ähnliches Modell – auch ohne physisches Kapital – stammt von Young (1998). Hauptunterschied zu diesem Modell ist die Annahme über die intertemporalen Wissens-Spillover. In den beiden Modellen von Grossman & Helpman (1991*a*, Kapitel 3 und 4) gibt es starke intertemporale Spillover. Im Qualitätenmodell ist die Wahrscheinlichkeit für einen Forschungserfolg unabhängig von der bereits erreichten Qualitätsstufe. Das bedeutet, dass Erfinder für höhere Stufen auf das vorhandene technische Wissen der aktuellen Qualität frei zugreifen können. Sie können sich das Wissen der aktuellen Stufe ohne Kosten aneignen. Im Varietäten-Modell gibt es einen ähnlichen Spillover-Effekt. Es werden umso mehr neue blueprints pro Zeiteinheit erfunden, je mehr blueprints vorhanden sind. Forschung begünstigt also künftige Forschung in hohem Maße.[1] Im Modell von Young (1998) gibt es diese Spillover-Effekte nur für vertikale Innovationen (Qualitätsverbesserungen). Je höher die aktuelle Qualität eines Produktes ist, desto geringer sind die Fixkosten einer besseren Qualität. Für neue Varietäten (horizontale Innovation) gibt es diese Spillover nicht. Als Resultat entsteht in diesem Modell Wachstum allein durch Qualitätsverbesserungen, es gibt im Steady state eine konstante Anzahl an Varietäten. Niveaugrößen, wie die Bevölkerungszahl, haben einen Einfluss auf die Anzahl der Varietäten, also auf ein Niveau, aber nicht auf die langfristige Wachstumsrate. Es kommt zu semi-endogenem Wachstum.

Allerdings ist die starke Asymmetrie der Spillover-Effekte bei horizontalen und vertikalen Innovationen durchaus kritikwürdig. Im hier entwickelten Modell kommt es auch zu semi-endogenem Wachstum, ohne dass es so einer starken Annahme bedarf. Damit entwickelt es das Romer-Modell weiter und liefert eine alternative Möglichkeit, den Skaleneffekt zu beseitigen. Darüber hinaus wird der Innovationsprozess treffender modelliert, indem die beiden Kanäle der innovationsbasierten Wachstumstheorie – Qua-

[1] Bei Li (2000) werden diese Spillover-Effekte verallgemeinert. Darauf wird weiter unten noch detaillierter eingegangen.

litätsverbesserungen und Erfindungen neuer Produkte – zusammengeführt werden. Beide Arten von Innovation sind hier möglich. Gegenüber dem Modell von Li (2000) ist das Modell hier vorteilhaft, weil Kapital für die Produktion notwendig ist. Mit der Mikrofundierung des Innovationsprozesses und der Vermeidung von Skaleneffekten ergibt sich vielleicht eine neue Möglichkeit, ein theoretisches Wachstumsmodell empirisch zu überprüfen.

Im nächsten Abschnitt wird das Romer-Modell mit horizontalen und vertikalen Innovationen vorgestellt und vom Modell von Li (2000) abgegrenzt. Danach wird in Abschnitt 3 das dynamische Gleichgewicht mit der langfristigen Wachstumsrate und der Ressourcenallokation bestimmt. Schließlich werden in Abschnitt 4 die Ergebnisse nochmals zusammengefasst und diskutiert.

2 Beschreibung des Modells

Die Struktur des Modells ist in Abbildung 1 dargestellt. Das Endprodukt, Y, kann entweder konsumiert werden oder als Rohkapital für die Kapitalgüter, $x(j)$, verwendet werden. Neu ist, dass es nun zwei Forschungssektoren gibt. In einem wird Qualitätsverbesserung betrieben, im anderen werden neue Varietäten erfunden. Insgesamt gibt es also drei Möglichkeiten, Arbeit einzusetzen. Die Bevölkerung, $L(t)$, ist nicht konstant, sondern wächst mit der Rate n. Das Endprodukt wird wieder mit Arbeit und Kapitalgütern hergestellt,

$$Y = D_Y^{\alpha} L_Y^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

wobei der Kapital-Qualitätsindex, D_Y, folgende Form hat

$$D_Y \equiv \left\{ \int_0^{A(t)} \left[\sum_{\omega=0}^{\Omega(j)} q_\omega(j) x_\omega(j) \right]^{\beta} dj \right\}^{\frac{1}{\beta}}, \qquad 0 < \beta < 1. \tag{2}$$

Es gibt eine Masse $A(t)$ von Varietäten, die durch Forschung ausgeweitet werden kann. Ähnlich wie im Romer-Modell bedeuten zusätzliche Produkte mehr Spezialisierung und eine höhere Produktivität in der Produktion des Endproduktes, Y. Aus jedem Sektor werden $x_\omega(j)$ Kapitalgüter der Qualität q_ω nachgefragt. Die Qualität ergibt sich aus

$$q_\omega(j) = \lambda^{\omega} Q(\tau)^{\frac{1-\beta}{\beta}}. \tag{3}$$

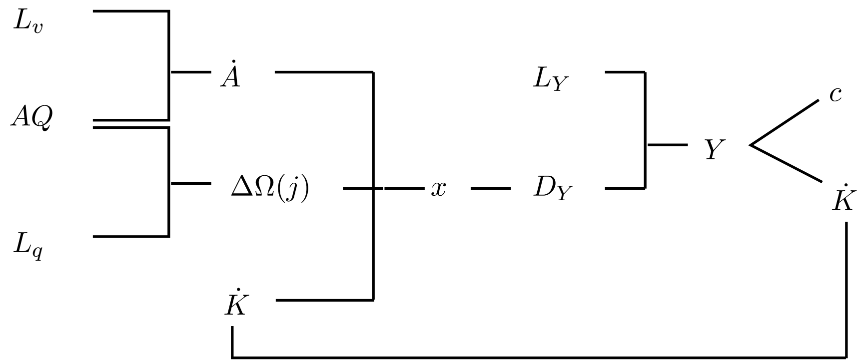

Abbildung 1: Die Struktur des Modells

Der erste Ausdruck, λ^{ω}, gibt an, dass die Varietät schon ω-mal qualitativ verbessert wurde, wobei λ (> 1) wieder die Höhe einer „Qualitätsstufe“ ist. Für neue Varietäten ist die Qualitätsstufe $\omega = 0$, sie haben aber eine „Basis-Qualität“ $Q(\tau)$. Der Zeitpunkt der Erfindung ist τ.[2] $Q(\tau)$ ist ein gewichteter Durchschnitt der bei Erfindung vorhandenen höchsten Qualitäten der anderen Sektoren:

$$Q(\tau) = \frac{1}{A(\tau)} \int_0^{A(\tau)} q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}(j) dj. \tag{4}$$

Anders betrachtet spiegelt der Ausdruck $A(t)Q(t) = \int_0^{A(t)} q_{\Omega(j)}^{\beta/(1-\beta)}(j)dj$ den Stand des technischen Wissen, ausgedrückt durch die erreichten Qualitäten, $q_{\Omega(j)}(j)$, und die verfügbaren Varietäten, $A(t)$, zu einem Zeitpunkt t wider.

Der Index D_Y in (2) ist eine Modifikation von $D_Y = \int_0^A x(j)^{\alpha} dj$ aus dem Romer-Modell (siehe Gleichung (1') in Romer (1990)). Zwei Kapitalgüter der gleichen Produktlinie sind, um die unterschiedliche Qualität bereinigt, perfekte Substitute. Zwei Kapitalgüter aus verschiedenen Produktlinien sind unvollkommende Substitute. Die Substitutionselastizität beträgt $1/(1-\beta)$.

Anders als in Li (2000) werden Zwischenprodukte nicht mit Arbeit hergestellt, sondern aus nicht-konsumiertem Output („Rohkapital“). Es wird zur Vereinfachung angenommen, dass aus einer Einheit Rohkapital eine Einheit des Kapitalgutes ohne weitere Faktoren entsteht. Kapitalguthersteller haben zwei Möglichkeiten, Forschung zu betreiben: Entweder sie entwickeln

[2] Die einzelnen Varietäten werden zu unterschiedlichen Zeitpunkten erfunden. Streng genommen müsste der Zeitpunkt der Erfindung, τ, also noch mit einem zusätzlichen Index (beispielsweise τ_j) versehen werden. In der folgenden Analyse spielt diese Unterscheidung aber keine Rolle, weshalb auf sie zur besseren Übersichtlichkeit verzichtet wird.

bessere Qualitäten bestehender Produkte. Dann wird wegen des „Arrow-“ oder „replacement“-Effekts weitere Forschung nur von „Outsidern“ betrieben. Oder sie entwickeln komplett neue Produkte (Varietäten), die dann die Basis-Qualität $Q(t)$ haben.

Die Forschungstechnologie für Varietäten-F&E ist ähnlich zu der im Jones-Modell (siehe Gleichung (7) in Jones (1995*a*))

$$dA(t) = \frac{L_v(t)}{a_v} A(t)^{\phi_v} Q(t)^{\delta_v - 1} dt, \qquad \phi_v,\, \delta_v > 0. \tag{5}$$

Wird die Menge L_v an Arbeit dt lang eingesetzt, dann entstehen dA neue Varietäten. Die Produktivität von Forschungsarbeit wird mit a_v angegeben. Der Ausdruck $A(t)^{\phi_v} Q(t)^{\delta_v - 1}$ fängt zwei externe Effekte auf. $A(t)^{\phi_v} Q(t)^{\delta_v}$ ist der positive Effekt des Bestandes an technischem Wissen, $A(t)Q(t)$, auf Varietäten-Forschung. Aber es gibt auch einen negativen Effekt, $Q(t)^{-1}$, der ausdrückt, dass Forschung bei höherer Qualität immer schwieriger wird.

Bezüglich Qualitäten-F&E wird wieder angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit, in einem Sektor j die Qualität zu erhöhen, I, davon abhängt, wie viel Forschungseinsatz in Form von Arbeit, L_q, getätigt wird, und auf welchem technischem Niveau man sich bereits befindet. Konkret gilt folgende Technologie:

$$I(j,t) = \frac{L_q(j,t)}{a_q} \frac{A(t)^{\phi_q} Q(t)^{\delta_q}}{q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}(j,t)}, \qquad \phi_q,\, \delta_q > 0, \tag{6}$$

mit a_q als Produktivitätsparameter und $A(t)^{\phi_q} Q(t)^{\delta_q}$ als positivem Effekt von bestehendem technischem Wissen auf den Qualitäten-Forschungsprozess. Der Ausdruck $q_{\Omega(j)}^{\beta/(1-\beta)}(j,t)$ im Nenner bedeutet, dass in einem Sektor j Qualitätssteigerungen immer schwieriger werden, je höher die aktuelle Qualität ist, die verbessert werden soll.

Bei Li (2000) ist der Schwerpunkt der Analyse, dass bei den hier gewählten Forschungstechnologien in einem Wachstumsmodell mit zwei Forschungssektoren semi-endogenes Wachstum die Regel und endogenes Wachstum die äußerst unwahrscheinliche Ausnahme ist.[3] Auf diesen Aspekt wird hier nicht weiter eingegangen.

[3] Li zeigt, dass nur, wenn $\phi_q = \phi_v$ und $\delta_q = \delta_v$ gleichzeitig gilt, die Wachstumsrate leicht beeinflusst werden kann, z.B. durch eine Forschungssubvention (endogenes Wachstum).

3 Dynamisches Gleichgewicht

Ähnlich wie im Jones-Modell werden die Wachstumsraten der verfügbaren Varietäten und die der durchschnittlichen Qualität durch exogene Größen, u.a. der Bevölkerungswachstumsrate, n, festgelegt. Im Folgenden werden (nach der Bestimmung des optimalen Konsumpfades der Haushalte in 3.1) zunächst diese Wachstumsraten in Unterabschnitt 3.2 berechnet, danach wird in 3.3 die Wachstumsrate der Endproduktherstellung, g_Y, und in 3.4 die Aufteilung von Arbeit auf die drei Sektoren bestimmt.

Zuvor wird aber die Bedingung für einen optimalen Konsumpfad der Haushalte hergeleitet.

3.1 Haushalte

Die Haushalte maximieren die intertemporale Nutzenfunktion

$$\max_{c(t)} U(0) = \int_0^\infty e^{-\rho t} L(t) \, \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} dt,$$

gegeben die Haushalts-Budgetbeschränkung[4]

$$\dot{\nu}(t) + c(t)L(t) = r(t)\nu(t) + w(t)L(t).$$

Für den Parameter σ, der die intertemporale Substitutionselastizität im Konsum bestimmt, und die Diskontrate ρ werden wieder nur positive Werte zugelassen.

Aus der Hamiltonfunktion $\mathcal{H} = e^{-\rho t} L \, (c^{1-\sigma} - 1)/(1-\sigma) + \xi \, [wL + r\nu - cL]$ ergeben sich die Bedingungen erster Ordnung

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = c^{-\sigma} \, e^{-\rho t} L - \xi L = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu} = r\xi = -\dot{\xi}. \tag{8}$$

Außerdem muss die Transversalitätsbedingung erfüllt sein:

$$\lim_{t \to \infty} \nu \, \xi = 0. \tag{9}$$

[4]Wie z.B. bei Barro & Sala-i-Martin (2004, Kapitel 2) könnte auch mit der Budgetbeschränkung pro Kopf, $\dot{a} = ar + w - c - an$, mit a als Pro-Kopf Bestand an Wertpapieren, optimiert werden. Die Resultate sind identisch.

Aus den Bedingungen (7) und (8) folgt die Ramsey-Regel[5]

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r - \rho}{\sigma}. \tag{10}$$

Die Transversalitätsbedingung legt wieder eine Beschränkung auf die möglichen Parameterwerte der Ökonomie. Diese wird weiter unten genauer bestimmt.

3.2 Technischer Fortschritt

Definitionsgemäß sind in einem Steady-state die Wachstumsraten und die anteilsmäßige Aufteilung von Arbeit konstant. Die Veränderung einer Wachstumsrate muss daher gleich null sein. Die eingesetzten Arbeitsmengen in den einzelnen Bereichen müssen mit der gleichen Rate wie die Gesamtmenge an Arbeit wachsen: $\dot{L}_v/L_v = n$. Aus Gleichung (5) folgt:

$$\frac{d \ln g_A}{dt} = 0 = n + (\phi_v - 1)\frac{\dot{A}}{A} + (\delta_v - 1)\frac{\dot{Q}}{Q},$$

bzw.

$$n = (1 - \phi_v) g_A + (1 - \delta_v) g_Q. \tag{11}$$

Im Gleichgewicht muss die Forschungsintensität in allen Sektoren gleich

[5]Häufig wird nicht die Summe dieser Pro-Kopf-Nutzen, sondern der Pro-Kopf-Nutzen eines Haushaltsmitglieds maximiert. Die Hamiltonfunktion lautet dann

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} + \xi \left(wL + r\nu - cL \right)$$

mit L als zeitabhängiger Variable. Aus $\partial\mathcal{H}/\partial c = 0$ und $\partial\mathcal{H}/\partial\nu = -\dot{\xi}$ folgt:

$$\xi = \frac{c^{-\sigma}\, e^{-\rho t}}{L}$$

$$\frac{\dot{\xi}}{\xi} = -r.$$

Logarithmisches Differenzieren der ersten Bedingung und Gleichsetzen mit der zweiten ergibt:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r - \rho - n}{\sigma}.$$

Die Wachstumsrate des Konsums, die aus dem Haushalts-Maximierungsproblem resultiert, ist im Vergleich zu dieser um n/σ höher, weil bei diesem der momentane Nutzen des Haushalts mit künftigem Nutzen des Haushalts verglichen wird. Der Haushaltsnutzen steigt aber alleine schon dadurch, dass es mehr Haushaltsmitglieder gibt, auch wenn der Einzelne gar keinen höheren Nutzen hat. Bei der Pro-Kopf-Betrachtung ist dies nicht der Fall. Deshalb wird bei der Pro-Kopf-Betrachtung mehr konsumiert und weniger gespart. Die Wachstumsrate des Konsums ist damit niedriger.

groß sein:[6]

$$I(j,t) = I(t). \tag{12}$$

Für die Wachstumsrate der durchschnittlichen Qualität wird im Anhang gezeigt, dass sie direkt proportional ist zur Forschungsintensität, I:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right) I. \tag{13}$$

Bezüglich β wurde angenommen, dass es zwischen null und eins liegt, λ ist strikt größer als eins. Damit ist der Ausdruck in Klammern positiv. Je höher die Forschungsintensität in Qualitäten-F&E, I, ist, umso schneller wächst die durchschnittliche Qualität der Produkte.

Auflösen von Gleichung (6) nach Arbeit ergibt:

$$L_q(j,t) = \frac{a_q q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}(j,t) I(t)}{A(t)^{\phi_q} Q(t)^{\delta_q}}.$$

Diese Gleichung gibt die in einem beliebigen Sektor, j, nachgefragt Menge an Arbeit für Qualitäten-F&E an. Die gesamte Arbeit, die in Qualitätsforschung gesteckt wird, beträgt: $L_Q(t) \equiv \int_0^{A(t)} L_q(j,t)dj$. Es folgt

$$L_Q(t) = \frac{a_q I(t) \int_0^{A(t)} q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}(j,t)dj}{A(t)^{\phi_q} Q(t)^{\delta_q}}.$$

Der Integralausdruck ist gemäß der Definition der durchschnittlichen Qualität aus (4) gleich $A(t)Q(t)$. Wird außerdem Gleichung (13) nach I aufgelöst und eingesetzt, dann folgt nach wenigen Umformungen eine Gleichung für die Wachstumsrate von Q in Abhängigkeit vom Stand des technischen Wissens, $A(t)$ und $Q(t)$, und der Gesamtbeschäftigung in Qualitäten-F&E:

$$\frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)} = \frac{\left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right) L_Q(t) A(t)^{\phi_q - 1} Q(t)^{\delta_q - 1}}{a_q}. \tag{14}$$

In einem Steady state muss die Wachstumsrate von Q und der Arbeitsanteil in Qualitätsforschung, L_Q/L, wieder konstant sein. Durch logarithmisches Differenzieren der letzten Gleichung erhält man

$$\frac{d \ln g_Q}{dt} = 0 = n + (\phi_q - 1)\frac{\dot{A}}{A} + (\delta_q - 1)\frac{\dot{Q}}{Q}$$

[6]Dies wird weiter unten noch gezeigt.

bzw.

$$n = (1 - \phi_q)g_A + (1 - \delta_q)g_Q. \tag{15}$$

Ähnlich wie im Jones-Modell werden durch die Annahme nicht-linearer Wissens-Spillover in den Forschungstechnologien die Wachstumsraten von A und Q, g_A und g_Q, durch exogene Parameter festgelegt. Die beiden Gleichungen (11) und (15) bestimmen g_A und g_Q:

$$g_A = \frac{\delta_q - \delta_v}{Z} n, \tag{16}$$

$$g_Q = \frac{\phi_v - \phi_q}{Z} n, \tag{17}$$

wobei Z folgendermaßen definiert ist:

$$Z \equiv (1 - \phi_q)(1 - \delta_v) - (1 - \phi_v)(1 - \delta_q). \tag{18}$$

Damit die Wachstumsrate von Q positiv ist, muss entweder $\phi_v > \phi_q$ und $Z > 0$ sein, oder $\phi_v < \phi_q$ und $Z < 0$. Analog ist g_A größer null, wenn $\delta_q > \delta_v$ und $Z > 0$ oder $\delta_q < \delta_v$ und $Z < 0$. Zusammen ergibt dies folgende Beschränkung auf die zulässigen Werte der Parameter δ_q, δ_v, ϕ_q und ϕ_v: Für

$$\begin{array}{c} \phi_v > \phi_q \quad \text{und} \quad \delta_q > \delta_v \\ \text{oder} \\ \phi_v < \phi_q \quad \text{und} \quad \delta_q < \delta_v \end{array} \tag{19}$$

sind sowohl die Wachstumsrate von A, g_A, als auch die Wachstumsrate von Q, g_Q, positiv. Beides muss in einem langfristigen Gleichgewicht der Fall sein.[7]

Nun sind zwar die Wachstumsraten von A und Q bestimmt, es ist aber noch nicht bekannt, wie sich dies auf die Wachstumsraten der Produktion von Y übersetzt.

3.3 Wachstumsrate des Outputs

Die Wachstumsrate des Outputs, g_Y, kann aus der Produktionsfunktion von Y hergeleitet werden, wenn diese als eine Funktion der Faktoren Arbeit,

[7] Nicht zwingend erforderlich ist die Restriktion δ_q, δ_v, ϕ_q, $\phi_v < 1$. Notwendig ist nur, dass die rechten Seiten der Gleichungen (11) und (15) positiv sind. Einzelne Parameter können auch größer als eins sein (vgl. Li (2000)).

Kapital und Technologie geschrieben wird: $Y = F(L_Y, K, A, Q)$. Dazu sind aber einige Vorarbeiten nötig.

Firmen im Endproduktsektor verhalten sich kompetitiv und maximieren ihre Gewinne, mit dem Endprodukt Y als Numeraire:

$$\max_{L_Y, x_\omega(j)} \left\{ \int_0^A \left[\sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} q_\omega(j) x_\omega(j) \right]^\beta dj \right\}^{\frac{\alpha}{\beta}} L_Y^{1-\alpha} - wL_Y - \int_0^A \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} p_\omega(j) x_\omega(j) dj.$$

Weil Produzenten höherer Qualitäten diejenigen geringerer Qualitäten aus dem Markt preisen, werden nur höchste Qualitäten in der Herstellung von Y eingesetzt. Es wird unterstellt, dass Qualitätsverbesserungen immer „drastisch“ sind. Das bedeutet, dass es sich beim Monopolpreis des Qualitätsführers für keinen anderen Hersteller einer niedrigeren Qualität der gleichen Varietät lohnt, noch zu produzieren.[8] Die genaue Bedingung für eine drastische Innovation folgt weiter unten. Das Maximierungsproblem lautet nun

$$\max_{L_Y, x_{\Omega(j)}(j)} \left\{ \int_0^A \left[q_{\Omega(j)}(j) x_{\Omega(j)}(j) \right]^\beta dj \right\}^{\frac{\alpha}{\beta}} L_Y^{1-\alpha} - wL_Y - \int_0^A p_{\Omega(j)}(j) x_{\Omega(j)}(j) dj.$$

Zur Vereinfachung der Notation werden folgende Variablen definiert: $x_{\Omega(j)}(j) \equiv x(j)$ und $p_{\Omega(j)}(j) \equiv p(j)$ seien die Mengen und Preise der höchsten Qualität $q_{\Omega(j)}(j) \equiv q(j)$.

Die Bedingung erster Ordnung für $x(j)$ liefert die Nachfrage nach Kapitalgut $x(j)$:

$$x(j) = \left[\frac{\alpha Y}{D_Y^\alpha} \frac{q(j)^\beta}{p(j)} \right]^{\frac{1}{1-\beta}}. \tag{20}$$

Die Optimalitätsbedingung bezüglich Arbeit (Arbeitsnachfrage) lautet

$$wL_Y = (1-\alpha)Y. \tag{21}$$

Diese Gleichung gibt zum einen die Arbeitsnachfrage aus dem Endproduktsektor an. Zum anderen besagt sie, dass ein konstanter Anteil, $1-\alpha$, vom Produktionswert von Y an die Lohnempfänger geht.

Die Hersteller der Kapitalgüter maximieren ebenfalls ihre Gewinne, wobei zur Vereinfachung $\pi_{\Omega(j)}(j) \equiv \pi(j)$ definiert wird: $\max_{x(j)} \pi(j) = p(j)x(j) - rK(j) = [p(j) - r]\, x(j)$. Mit der Nachfrage aus (20) folgt

$$\max_{p(j)} \pi(j) = [p(j) - r] \left[\frac{\alpha Y}{D_Y^\alpha} \frac{q(j)^\beta}{p(j)} \right]^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

[8] Siehe Tirole (1988, Kapitel 10.1).

Der sich ergebende Preis ist ein Aufschlag auf die Grenzkosten

$$p(j) = \frac{r}{\beta}. \tag{22}$$

Der Parameter β, der die Substituierbarkeit zwischen Kapitalgütern aus verschiedenen Produktlinien determiniert, bestimmt auch den Preisaufschlag, den ein Monopolist verlangen kann. Ein kleiner Wert von β bedeutet eine schlechte Substituierbarkeit zwischen den Varietäten. Endprodukthersteller können bei einem Preisanstieg eines Kapitalgutes nur schlecht ausweichen, weshalb die Monopolisten einen hohen Aufschlag verlangen können.[9]

Die Annahme einer drastischen Innovation bedeutet, dass dieser Preis kleiner sein muss als das λ-fache der Stückkosten des direktesten Konkurrenten der gleichen Varietät (der Produzent mit der nächsthöheren Qualität), weil die beste Qualität λ-mal so gut ist wie diese:

$$p_{\Omega(j)}(j) < \lambda p_{\Omega(j)-1}(j).$$

Der niedrigste Preis, bei dem der Konkurrent gerade keine Verluste macht, entspricht seinen Grenzkosten, r. Damit ergibt sich folgende Bedingung für drastische Innovationen:

$$\beta\lambda > 1.$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann spricht man von einer nicht-drastischen Innovation. Es ist dann nötig, weitere Annahmen über das Verhalten der Kapitalgüterproduzenten zu machen (Duopol oder „limit pricing“ des Qualitätsführers). Das macht das Modell komplizierter, verspricht aber keine substantiellen Einsichten zu liefern.

Aus (20) ergibt sich eine relative Nachfrage zwischen einem Kapitalgut j und einem anderen, j':

$$\frac{x(j)}{x(j')} = \left[\frac{q(j)}{q(j')}\right]^{\frac{\beta}{1-\beta}}. \tag{23}$$

Die relative Nachfrage hängt im Gleichgewicht nur von den beiden Qualitätsni-veaus ab, weil die Preise für die zwei Güter gleich sind. Einsetzen von $x(j)$ in die Produktionsfunktion von Y und Umformen ergibt mit (4)

$$x(j) = \left(\frac{Y}{L_Y^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} q(j)^{\frac{\beta}{1-\beta}}(AQ)^{-\frac{1}{\beta}}. \tag{24}$$

[9] Beispielsweise ist bei $\beta = 0{,}1$ die Substitutionselastizität 10/9 und der Preis wäre, falls es sich um eine drastische Innovation handelt, das Zehnfache der Grenzkosten. Bei $\beta = 0{,}5$ ist Substitutionselastizität gleich zwei und damit größer. Der Preisaufschlag beträgt nur noch 100% auf die Grenzkosten.

Je höher die Qualität eines Produktes j ist, umso größer ist die Nachfrage danach, weil der Preis einheitlich ist. Diese Gleichung und den Ausdruck für die Preise, Gleichung (22), in die Gewinnfunktion der Kapitalgüterproduzenten, $\pi(j) = [p(j) - r]x(j)$, eingesetzt liefert

$$\pi(j) = r\frac{1-\beta}{\beta}\left(\frac{Y}{L_Y^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} q(j)^{\frac{\beta}{1-\beta}}(AQ)^{-\frac{1}{\beta}}. \tag{25}$$

Der Gewinn eines Produzenten steigt mit dem aggregierten Output, Y, und fällt mit zunehmender Produktvielfalt, A, und mit steigendem Qualitätsindex, Q, weil dann neue und bessere Produkte verfügbar werden, die von den Endproduktherstellern stattdessen eingesetzt werden. Außerdem steigt der Gewinn mit der eigenen Qualität, $q(j)$, weil bei konstanten Preisen die abgesetzten Mengen steigen, die Kosten wegen gleicher Inputkoeffizienten (eine Einheit Rohkapital liefert eine Einheit des Kapitalgutes) aber unverändert bleiben.

Einsetzen der Nachfrage nach Kapitalgut j, Gleichung (24), in die Definition des Kapitalstocks, $K \equiv \int_0^A x(j)dj$, ergibt

$$K = \left(\frac{Y}{L_Y^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} (AQ)^{-\frac{1}{\beta}} \int_0^A q(j)^{\frac{\beta}{1-\beta}} dj.$$

Weil der Integralausdruck wieder AQ entspricht (siehe Gleichung (4)), folgt

$$K = \left(\frac{Y}{L_Y^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} (AQ)^{\frac{\beta-1}{\beta}}. \tag{26}$$

Diese Gleichung lässt sich Umformen zu

$$Y = L_Y^{1-\alpha} K^{\alpha} (AQ)^{\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta}}. \tag{27}$$

Aus dieser Gleichung kann die Wachstumsrate des Outputs, Y, abgeleitet werden:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = (1-\alpha)\frac{\dot{L}_Y}{L_Y} + \alpha\frac{\dot{K}}{K} + \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{Q}}{Q}\right). \tag{28}$$

Der Kapitalstock, K, und die Produktion des Endproduktes, Y, wachsen mit der gleichen Rate: Für das Verhältnis vom Kapitalstock zum Output lässt sich eine einfache Beziehung aus der Nullgewinnbedingung in der Güterproduktion von Y herleiten. Der Umsatz entspricht den Lohnkosten und den Ausgaben für die Kapitalgüter: $Y = wL_Y + p\int_0^A x(j)dj$. In dieser Gleichung wurde verwendet, dass die Preise für die Kapitalgüter einheitlich sind: $p(j) = p$ (siehe (22)). Außerdem besagt Gleichung (21), dass der Anteil $(1-\alpha)$ des Produktionswertes von Y für die Löhne aufgewendet wird: $wL_Y = (1-\alpha)Y$. Mit der Definition des Kapitalstocks, $K \equiv \int_0^A x(j)dj$, folgt $\alpha Y = pK$. Einsetzen von (22) ergibt

$$\kappa \equiv \frac{K}{Y} = \frac{\alpha\beta}{r}. \tag{29}$$

Der Zins ist im Steady state konstant. Damit ist auch das Verhältnis von K zu Y konstant. K und Y wachsen mit der gleichen Rate.

Im Steady state muss L_Y mit der gleichen Rate wie die Bevölkerung wachsen. Damit folgt für Gleichung (28) für einen Steady state:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1-\beta}{\beta}(g_A + g_Q) + n.$$

Die Pro-Kopf-Wachstumsrate des Outputs ($\dot{y}/y = \dot{Y}/Y - n$) ist proportional zu den Wachstumsraten der Anzahl der Produkte, g_A, und der durchschnittlichen Qualität der Produkte, g_Q. Einsetzen der Wachstumsraten von A und Q, Gleichungen (11) und (15), ergibt

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\alpha(1-\beta)\,(\delta_q - \delta_v + \phi_v - \phi_q)}{\beta(1-\alpha)Z}\,n. \tag{30}$$

Unter den in (19) gemachten Einschränkungen für die Parameter δ_q, δ_v, ϕ_q, und ϕ_v, die die Stärke der Wissens-Spillover angeben, ist diese Wachstumsrate positiv. Analog zum Jones-Modell ist sie umso höher, je höher die Wachstumsrate der Bevölkerung ist.

Wird der folgende Technologieindex definiert,

$$(AQ)^{\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}} \equiv T,$$

dann folgt aus Gleichung (27), dass sich die komplexe Produktionsfunktion hier,

$$Y(t) = \left\{ \int_0^{A(t)} \left[\sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} q_\omega(j)x_\omega(j) \right]^\beta dj \right\}^{\frac{\alpha}{\beta}} L_Y(t)^{1-\alpha},$$

wieder in eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion mit Arbeit-vermehrendem technischen Fortschritt, wie sie z.B. im Solow-Modell verwendet wird, reduzieren lässt:

$$Y = K^\alpha (TL_Y)^{1-\alpha}.$$

Wie im Solow-Modell kann das Sozialprodukt pro Kopf langfristig (d.h. im Steady state) nicht durch Kapitalakkumulation ($g_K > 0$) alleine wachsen. Erst technischer Fortschritt, im Modell verkörpert in einer größeren Vielfalt und besseren Qualitäten an Kapitalgütern, sichert steigenden Wohlstand. Das vorliegende Modell kann als neoklassisches Wachstums-Modell verstanden werden, in dem der technische Fortschritt endogen erklärt wird, aber ohne die kontra-faktischen Implikationen des Romer-Modells aufzuweisen. Es ist ein weiterer Schritt zur Entwicklung einer einheitlichen Wachstumstheorie, wie sie von Dinopoulos & Sener (2006) gefordert wird:

> „ ... scale-invariant Schumpeterian growth models with endogenous technological change represent one more step towards a unified growth theory which would eventually combine the insights of neoclassical and Schumpeterian growth theories.“

Solow selbst sieht die Modelle der endogenen Wachstumstheorie als neoklassische Modelle an (Solow 2005):

> „In the broad sense ... the 'endogenous growth' models of Romer and Lucas and their many successors are entirely neoclassical.“

3.4 Allokation von Arbeit

Es verbleibt, die Allokation von Arbeit auf die drei Verwendungen – zur Produktion des Endproduktes, Y, oder in den beiden Forschungssektoren – zu bestimmen. Gleichgewicht auf dem Arbeitsmarkt bedeutet $L(t) = L_Y(t) + L_v(t) + L_Q(t)$. Weil die Bevölkerung wächst, ist es bequemer, diese Gleichgewichtsbedingung in Arbeitsanteilen anzugeben:

$$1 = \frac{L_Y}{L} + \frac{L_v}{L} + \frac{L_Q}{L}.$$

Aus Gewinnmaximierung im Endproduktsektor folgt die Nachfrage nach Arbeit, Gleichung (21):

$$L_Y = \frac{(1-\alpha)Y}{w}.$$

Die Nachfrage nach Arbeit aus dem Varietäten-Forschungssektor ergibt sich aus (5):

$$L_v = \frac{a_v g_A}{A^{\phi_v - 1} Q^{\delta_v - 1}} = \frac{a_v g_A L}{C_v}, \tag{31}$$

wobei C_v wie folgt definiert wurde:

$$C_v = A^{\phi_v - 1} Q^{\delta_v - 1} L. \tag{32}$$

Der Forschungssektor, der Qualitätenverbesserungen betreibt, hat die Arbeitsnachfrage aus (14):

$$L_Q = \frac{a_q g_Q}{\left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right) A^{\phi_q - 1} Q^{\delta_q - 1}} = \frac{a_q g_Q L}{\left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right) C_q}, \tag{33}$$

mit C_q als

$$C_q = A^{\phi_q - 1} Q^{\delta_q - 1} L. \tag{34}$$

Die einzelnen Arbeitsnachfragen in die Gleichgewichtsbedingung eingesetzt ergibt mit $\gamma \equiv Y/(wL)$:

$$1 = (1-\alpha)\gamma + \frac{a_v g_A}{C_v} + \frac{a_q g_Q}{\left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right) C_q}. \tag{35}$$

Aus (21) ist ersichtlich, dass γ in einem Steady state konstant ist (L_Y wächst mit Rate n). Aus (11) und (15) folgt, dass auch C_v und C_q im Steady state konstant sein müssen. Die Wachstumsraten g_A und g_Q sind mit (16) und (17) festgelegt. Damit bleiben die Variablen γ, C_v, und C_q zu bestimmen. Diese legen die relativen Arbeitsanteile von L_Y, L_v und L_Q fest. Zwei weitere Gleichungen zur Arbeitsmarkt-Gleichgewichtsbedingung (35) in den gesuchten Variablen folgen aus den beiden Arbitragegleichungen für den Kapitalmarkt und werden nun hergeleitet.

Im Forschungssektor herrscht freier Marktzutritt. Eine Innovation – egal ob es eine neue Varietät ist oder eine bessere Qualität eines bestehenden Produktes – wird wertlos, wenn eine bessere Qualität erfunden wird. Forschungsfirmen maximieren über die Wahl des Arbeitseinsatzes ihre Gewinne. Das Gewinnmaximierungskalkül für Firmen, die neue Produkte (Varietäten) erfinden, lautet:

$$\max_{L_v(t)} P_{A,v}(t)\dot{A}(t) - wL_v(t).$$

$P_{A,v}$ ist der Wert eines Patents für ein neues Kapitalgut, $\dot{A}$ die Anzahl an neuen Patenten. Einsetzen von (5) und Ableiten nach $L_v (> 0)$ ergibt den Patentwert

$$P_{A,v}(t) = \frac{a_v w(t) Q(t)}{B_v(t)} \tag{36}$$

mit

$$B_v(t) \equiv A(t)^{\phi_v} Q(t)^{\delta_v}. \tag{37}$$

Forschungsunternehmen, die die Qualität bestehender Produkte verbessern, maximieren

$$\max_{L_q(j,t)} P_{A,q}(j,t) I(j,t) - w L_q(j,t),$$

mit $P_{A,q}(j,t)$ als Wert eines Patents, wenn die Verbesserung gelingt in Sektor j und $I(j,t)$ als der Wahrscheinlichkeit für das Gelingen. Mit (6) folgt ein Patentwert

$$P_{A,q}(j,t) = \frac{a_q w(t) q(j,t)^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{B_q(t)}. \tag{38}$$

Hier wurde B_q als

$$B_q(t) \equiv A(t)^{\phi_q} Q(t)^{\delta_q} \tag{39}$$

definiert und $q_{\Omega(j)}(j,t) = q(j,t)$ verwendet.

Im Kapitalmarktgleichgewicht muss die erwartete Rendite aus einem Patent dem Zins r entsprechen, weil spezifische Risiken vollständig diversifizierbar sind. Die Arbitrage-Bedingung für Firmen mit Qualitäten-F&E lautet

$$r(t) = \frac{\dot{P}_{A,q}(j,t)}{P_{A,q}(j,t)} + \frac{\pi(j,t)}{P_{A,q}(j,t)} - I(j,t). \tag{40}$$

Sie muss für jede Produktlinie j gelten.

Aus (38) folgt außerdem

$$\frac{\dot{P}_{A,q}}{P_{A,q}} = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{B}_q}{B_q}. \tag{41}$$

$\dot{P}_{A,q}$ ist hier die Wertänderung, wenn keine Qualitätsverbesserung stattfindet. Deshalb ist $q(j)$ beim Ableiten von Gleichung (38) konstant. Wegen des „Arrow-Effekts“ betreibt ein Qualitätsführer keine weitere Forschung. Die Qualität wird immer nur von „Outsidern“ verbessert. Dann wird das Patent für den bisherigen Qualitätsführer wertlos. Aus (41) folgt, dass die Wachstumsrate der Patentwerte, $\dot{P}_{A,q}(j,t)/P_{A,q}(j,t)$, also der Kapitalgewinn, für alle Varietäten j gleich ist.

Außerdem ist die „Dividenenrendite“, $\pi(j,t)/P_{A,q}(j,t)$, für alle Produktlinien gleich. Durch Einsetzen der Gewinngleichung (25) und des Ausdrucks für den Patentwert, Gleichung (38), folgt für die Dividenenrendite, dass sie unabhängig von j ist:

$$\frac{\pi(j)}{P_{A,q}(j)} = \frac{(1-\beta) r Y^{\frac{1}{\alpha}} B_q}{a_q \beta w L_Y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} (AQ)^{\frac{1}{\beta}}}. \tag{42}$$

Weil sowohl die Dividenenrendite als auch die Kapitalgewinne in allen Sektoren gleich sind und der Zins in der Ökonomie einheitlich ist, folgt, dass die Arbitragegleichung (40) nur dann gleichzeitig für alle Sektoren j erfüllt sein kann, wenn $I(j,t)$ für alle Sektoren gleich ist:

$$I(j,t) = I(t).$$

Die vorne gemachte Behauptung, Gleichung (12), ist damit bewiesen. Produktlinien, in denen bereits viele Qualitätsverbesserungen stattgefunden haben, weisen hohe Gewinne für die Kapitalgüterproduzenten auf (siehe Gleichung (25)): $\partial\pi(j)/\partial q(j) > 0$. Damit folgt, dass der Wert eines Patentes umso höher ist, je höher die Qualität ist, zu deren Produktion das Patent berechtigt (siehe Gleichung (38)). Wegen freien Marktzutritts muss im Gleichgewicht $wL_q(j) = IP_{A,q}(j)$ gelten: Der (zu erwartende) Ertrag aus Forschung – mit Wahrscheinlichkeit I ist die Firma erfolgreich und erhält dann ein Patent mit Wert $P_{A,q}(j)$ – muss den Kosten der Forschung entsprechen. Ist also die Qualität einer Produktlinie j hoch, dann verspricht erfolgreiche Forschung eine hohe „Belohnung“ in Form eines wertvollen Patents. Deshalb wird auch die Forschungsanstrengung, $L_q(j)$, groß sein. Allerdings verbessert der höhere Arbeitseinsatz die Erfolgswahrscheinlichkeit von Forschung nicht: Je höher die Qualität eines Kapitalgutes ist, desto schwieriger wird es, sie weiter zu erhöhen (siehe (6)). Dieser negative externe Effekt gleicht den höheren Arbeitseinsatz gerade aus.

Eine Anmerkung: Bei der Herleitung hier wurde $I(j,t) = I(t)$ nicht schon als Annahme vorausgesetzt. Weder bei der Herleitung des Patentwertes (und dessen Wachstumsrate) noch bei der Bestimmung der Gewinne wurde Symmetrie bezüglich der Forschungsintensitiäten angenommen. $I(j,t) = I(t)$ muss also in einem Gleichgewicht gelten.

Der Ausdruck für die Dividendenrendite, Gleichung (42), kann vereinfacht werden. Einsetzen von (39), (26) und (34) ergibt

$$\frac{\pi(j)}{P_{A,q}(j)} = r \frac{1-\beta}{a_q \beta} \frac{K}{Y} \frac{Y}{wL} C_q.$$

Mit den Definitionen $\kappa \equiv K/Y$ und $\gamma \equiv Y/(wL)$ folgt

$$\frac{\pi(j)}{P_{A,q}(j)} = r\frac{1-\beta}{a_q\beta}\kappa\gamma C_q.$$

Diese Gleichung, den Ausdruck für die Kapitalgewinne, Gleichung (41), und $I(j) = I$ in (40) eingesetzt, ergibt

$$r = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{B}_q}{B_q} - I + r\frac{1-\beta}{a_q\beta}\kappa\gamma C_q.$$

Durch Auflösen nach dem Zinssatz, r, kann die Arbitragegleichung schließlich folgendermaßen geschrieben werden:

$$r = \frac{1}{1 - \frac{(1-\beta)C_q}{a_q\beta}\kappa\gamma}\left(\frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{B}_q}{B_q} - I\right). \tag{43}$$

Die Arbitrage-Bedingung für Patente aus Varietäten-F&E lautet:

$$r(t) = \frac{\dot{P}_{A,v}(t)}{P_{A,v}(t)} + \frac{\pi_0(j,t)}{P_{A,v}(t)} - I(t), \tag{44}$$

wobei $\pi_0(j,t)$ den Gewinn einer neuen Varietät darstellt, wenn also noch keine Qualitätsverbesserungen stattgefunden haben. Neue Produkte haben die Basis-Qualität $q_0(j,t) = Q(t)^{(1-\beta)/\beta}$. Die Gewinne betragen somit gemäß Gleichungen (25) und (26)

$$\pi_0(j) = r\frac{1-\beta}{\beta}\left(\frac{Y}{L_Y^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} Q(AQ)^{-\frac{1}{\beta}} = r\frac{1-\beta}{\beta}\frac{K}{A}.$$

Mit der Definitionen (37), (32), $\kappa \equiv K/Y$ und $\gamma \equiv Y/(wL)$, dem Patentwert in (36) und $\pi_0(j)$ lautet der Ausdruck für die Dividendenrendite:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi_0(j)}{P_{A,v}} &= r\frac{1-\beta}{a_v\beta}\frac{KA^{\phi_v-1}Q^{\delta_v-1}L}{wL} \\
&= r\frac{1-\beta}{a_v\beta}\frac{K}{Y}\frac{Y}{wL}C_v \\
&= r\frac{1-\beta}{a_v\beta}\kappa\gamma C_v.
\end{aligned}$$

Aus (36) kann ein Ausdruck für die Entwicklung des Wertes von Varietäten-Patenten hergeleitet werden:

$$\frac{\dot{P}_{A,v}}{P_{A,v}} = \frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{Q}}{Q} - \frac{\dot{B}_v}{B_v}. \tag{45}$$

Einsetzen der letzten beiden Gleichungen in die Arbitragegleichung (44) und Umformen ergibt schließlich:

$$r = \frac{1}{1 - \frac{(1-\beta)C_v}{a_v\beta}\kappa\gamma}\left(\frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{Q}}{Q} - \frac{\dot{B}_v}{B_v} - I\right). \tag{46}$$

In den drei Gleichungen (35), (43) und (46) sind folgende Variablen noch zu bestimmen: γ, C_q, C_v, κ, I, $\dot{w}/w$, $\dot{B}_q/B_q$, und $\dot{B}_v/B_v$. Als nächstes wird gezeigt, dass alle außer γ, C_q und C_v über die Wachstumsraten g_y, g_A oder g_Q und damit über exogene Parameter festgelegt sind.

Die Wachstumsraten von B_q und B_v sind offensichtlich nur von g_A, g_Q und Parametern abhängig (siehe (39) und (37)).

Das Verhältnis von Kapitalstock zu Output, κ, ist über Gleichung (29) vom Zins, r, abhängig. Der Zinssatz in den letzten beiden Gleichungen wird über die Ramsey-Regel bestimmt: $r = \sigma\dot{c}/c + \rho$. Aus der Gleichgewichtsbedingung für den Gütermarkt, $Y = cL + \dot{K}$, ergibt sich, dass der Pro-Kopf-Konsum im Steady state mit der gleichen Rate wie der Output pro Kopf wächst:

$$\frac{c}{Y/L} = \frac{cL}{Y} = 1 - \frac{\dot{K}}{K}\frac{K}{Y}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist konstant, weil K und Y mit der gleichen Rate wachsen. Deshalb muss auch die linke Seite konstant sein. Der Konsum pro Kopf, c, und der Output pro Kopf, y, wachsen mit der gleichen Rate

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{y}}{y}. \tag{47}$$

Damit folgt, dass sowohl der Zins, r, als auch das Verhältnis von Kapitalstock zu Output, κ, über die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Output, $\dot{y}/y$, in Gleichung (30) festgelegt werden.

Die Wachstumsrate des Lohnsatzes entspricht auch $\dot{y}/y$, was aus (21) klar wird. Die Innovationsrate, I, in Gleichung (13) wird über g_Q in Gleichung (17) festgelegt.

Damit folgt, dass in den drei Gleichungen (35), (43) und (46) nur noch die drei Variablen γ, C_q und C_v zu bestimmen sind. Diese legen dann die Arbeitsanteile in der Y-Produktion und den zwei Forschungssektoren fest. Im Folgenden wird gezeigt, dass die Arbeitsanteile L_Y/L, L_Q/L und L_v/L zwischen null und eins liegen.[10]

[10] Eine konkrete Berechnung der Arbeitsanteile ist prinzipiell möglich, stellt aber keine interessanten Ergebnisse in Aussicht. Deshalb wird darauf verzichtet.

Zur Beweisführung und der Vollständigkeit der Analyse werden noch die Parameterbereiche bestimmt, damit die Transversalitätsbedingung erfüllt ist.

Die Transversalitätsbedingung, mit $\nu(t)$ als Wertpapierbestand der Haushalte und $\xi(t)$ als Schattenpreis von Kapital, lautet (siehe Gleichung (9)):

$$\lim_{t\to\infty} \nu(t)\xi(t) = 0.$$

Die Wachstumsrate des Produkts $\nu(t)\xi(t)$ muss negativ sein:

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu} + \frac{\dot{\xi}}{\xi} < 0. \tag{48}$$

Der Wertpapierbestand der Haushalte setzt sich zusammen aus den gehaltenen Anteilen an den Kapitalgutproduzenten und den Ansprüchen auf den Kapitalstock, K:

$$\nu(t) = K(t) + A_v(t)\bar{P}_{A,v}(t) + A_q(t)\bar{P}_{A,q}(t).$$

Hierbei ist A_v der Anteil der Kapitalgutproduzenten, der Kapitalgüter in der Basis-Qualität herstellt. Der durchschnittliche Wert dieser Firmen zum Zeitpunkt t ist $\bar{P}_{A,v}(t)$. Der Anteil der Kapitalgutproduzenten, der erfolgreich die Qualität verbessert hat und wo die Produzenten Qualitätsführer in ihrer Produktlinie sind, sei A_q. Der durchschnittliche Wert dieser Produzenten zum Zeitpunkt t ist $\bar{P}_{A,q}(t)$.

Im Appendix wird gezeigt, dass sowohl der aggregierte Wert der Varietäten-Firmen als auch der aggregierte Wert der Qualitäten-Firmen, mit der Rate g_Y wächst. Aus Gleichung (29) folgt, dass auch der Kapitalstock mit dieser Rate wächst, weil der Zins konstant ist. Also wächst der gesamte Wertpapierbestand der Haushalte mit der gleichen Rate wie der Output:

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{y}}{y} + n. \tag{49}$$

Die Wachstumsrate des Schattenpreises, $\xi(t)$, ergibt sich aus der Optimalitätsbedingung (7) und Gleichung (47):

$$\frac{\dot{\xi}}{\xi} = -\sigma\frac{\dot{y}}{y} - \rho. \tag{50}$$

Einsetzen von (49) und (50) in (48) ergibt dann folgende Bedingung:[11]

$$\rho > (1-\sigma)\frac{\dot{y}}{y} + n. \tag{51}$$

[11] Häufig wird logarithmischer Nutzen unterstellt (d.h. $\sigma = 1$). Dann ist es hinreichend, wenn die Bevölkerungswachstumsrate, n, kleiner ist als die Diskontrate, ρ, damit die Transversalitätsbedingung erfüllt ist.

Diese Ungleichung ist gleichzeitig wieder die Bedingung dafür, dass der Nutzen des Haushalts nicht unendlich groß wird, d.h. für Konvergenz des Nutzenintegrals. Mit $L(t) = L(0)\exp(nt)$ lautet die intertemporale Nutzenfunktion:

$$U(0) = \int_0^\infty e^{-\rho t} L(0) e^{nt} \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} dt.$$

Damit das Integral konvergiert, muss der Integrand mit negativer Rate wachsen: $-\rho + n + (1-\sigma)\dot{c}/c < 0$. Mit (47) ist dies äquivalent zu (51).

Jetzt kann gezeigt werden, dass die Arbeitsanteile unter den gemachten Parameterrestriktionen (insbesondere der durch die Transversalitätsbedingung auferlegten) zwischen null und eins liegen. Gleichung (43) wird dazu nach C_q aufgelöst:

$$C_q = \left(1 - \frac{D_1}{r}\right) \frac{a_q \beta}{(1-\beta)\kappa\gamma}, \tag{52}$$

mit der Definition

$$D_1 = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{B}_q}{B_q} - I. \tag{53}$$

Analog folgt aus (46)

$$C_v = \left(1 - \frac{D_2}{r}\right) \frac{a_v \beta}{(1-\beta)\kappa\gamma}, \tag{54}$$

mit

$$D_2 = \frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{Q}}{Q} - \frac{\dot{B}_v}{B_v} - I. \tag{55}$$

Einsetzen von Gleichungen (52) und (54) in die Gleichgewichtsbedingung für den Arbeitsmarkt, Gleichung (35), ergibt:

$$\frac{1}{\gamma} = 1 - \alpha + \frac{g_A(1-\beta)\kappa}{\left(1 - \frac{D_2}{r}\right)\beta} + \frac{g_Q(1-\beta)\kappa}{\left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right)\left(1 - \frac{D_1}{r}\right)\beta}.$$

Im Anhang wird gezeigt, dass $r > D_1$ und $r > D_2$ gilt. Damit sind der zweite und dritte Term auf der rechten Seite der letzten Gleichung positiv. Gleiches gilt für $1 - \alpha$, weil α per Annahme zwischen null und eins liegt. Die linke Seite muss also auch positiv sein und damit: $\gamma > 0$. Aus der Arbeitsnachfrage im Endproduktsektor, Gleichung (21), und der Definition von γ folgt:

$$\frac{L_Y}{L} = (1-\alpha)\gamma \quad (> 0).$$

Weil $r > D_1$ gilt, folgt aus (52), dass auch C_q positiv ist. Für die Arbeitsnachfrage aus dem Qualitäten-Forschungssektor, Gleichung (14), gilt somit:

$$\frac{L_Q}{L} = \frac{a_q g_Q}{\left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right) C_q} \quad (> 0).$$

Als Letztes zum Arbeitsanteil in Varietäten-Forschung. Aus Gleichung (54) folgt, dass $C_v > 0$ gilt, weil $r > D_2$ ist. Damit ist auch die Arbeitsnachfrage aus dem Varietäten-Forschungssektor, Gleichung (31), positiv:

$$\frac{L_v}{L} = \frac{a_v g_A}{C_v} \qquad (> 0).$$

Die einzelnen Arbeitsanteile L_Y/L, L_Q/L und L_v/L sind also alle jeweils positiv. Gleichgewicht auf dem Arbeitsmarkt bedeutet, dass die Summe der drei Anteile gleich eins ist. Daraus folgt, dass keiner der Anteile größer als eins sein kann, weil dann einer der anderen Anteile negativ sein müsste. Damit ist bewiesen, dass jeder Arbeitsanteil zwischen null und eins liegt.

4 Schluss

In dieser Arbeit wurde das Romer-Modell aus dahingehend erweitert, dass zusätzlich zu horizontalen Innovationen vertikale Innovationen aus einem Qualitäten-Forschungssektor zugelassen werden. Außerdem wurden die Forschungstechnologien modifiziert. Dieses neue Modell hat mehrere Vorteile: (i) Dadurch, dass sowohl neue als auch bessere Produkte durch gewollte, profitorientierte Forschung möglich sind, wird eine wichtige Tatsache realer Ökonomien modelliert. (ii) Wie in den anderen Schumpeterschen Modellen kommt es auch hier zu kreativer Zerstörung. Produkte werden obsolet, wenn bessere entwickelt werden. (iii) Skaleneffekte werden eliminiert. Die Wachstumsrate des technischen Wissens (und des Outputs) hängt nur noch von Größen ab, die schwer zugänglich für Politikmaßnahmen sind, wie die Bevölkerungswachstumsrate (oder, falls L nicht als Bevölkerung, sondern als Bestand an Humankapital integriert wird, von der Zunahme dieses Humankapitals). (iv) Trotz der komplexen mikroökonomischen Fundierung kann die Produktionsfunktion in eine Cobb-Douglas-Form mit L_Y, K und technischem Wissen als Argumenten gebracht werden, die identisch ist zu der in neoklassischen Modellen oft verwendeten. (v) Im Vergleich zum Modell von Li (2000) ist dieses vorteilhaft, weil Kapital ein notwendiger Input in der Produktion ist und Kapitalakkumulation möglich ist.

Appendix: Herleitung der Wachstumsrate von $Q(t)$

Gleichung (13) besagt, dass die Wachstumsrate der durchschnittlichen Qualität, g_Q, abhängig ist von der Forschungsintensität in Qualitäten-F&E. Dieser Zusammenhang folgt direkt durch Ableiten der Definition von Q aus Gleichung (4),

$$Q(t) = \frac{1}{A(t)} \int_0^{A(\tau)} q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}(j) dj,$$

nach der Zeit (unter Verwendung der Leibniz-Regel):

$$\dot{Q}(t) = \frac{\int_0^{A(t)} \left[q_{\Omega(j)+1}^{\frac{\beta}{1-\beta}} - q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}} \right] I(j,t) dj}{A(t)} + \frac{\dot{A}(t) q_{\Omega(A)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}(A,t)}{A(t)} - \frac{\dot{A} \int_0^{A(t)} q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}} dj}{[A(t)]^2}.$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern gibt die Veränderung von $q^{\beta/(1-\beta)}(j)$ an, wenn eine Verbesserung passiert. $I(j,t)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür und ist für alle Sektoren gleich (siehe (12)): $I(j,t) = I(t)$. Der erste Bruch steht deshalb für den Einfluss der Qualitätssprünge auf den Index $Q(t)$ bei einer konstanten Anzahl an Varietäten, $A(t)$. Der zweite Bruch steht für den positiven Effekt zusätzlicher Varietäten auf den Index, der sich dadurch ausdrückt, dass sich die obere Integrationsgrenze nach außen verschiebt. Allerdings wird in $Q(t)$ über alle Varietäten „gemittelt", weshalb es auch einen negativen Effekt von zunehmenden Varietäten auf $Q(t)$ gibt. Dieser wird mit dem letzten Bruch aufgefangen.

Der Ausdruck in eckigen Klammern kann über (3) folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} q_{\Omega(j)+1}^{\frac{\beta}{1-\beta}} - q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}} &= \lambda^{[\Omega(j)+1]\frac{\beta}{1-\beta}} Q(\tau) - \lambda^{\Omega(j)\frac{\beta}{1-\beta}} Q(\tau) \\ &= \lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}\Omega(j)} \left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1 \right) Q(\tau) \\ &= \left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1 \right) \left[\lambda^{\Omega(j)} Q(\tau)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \right]^{\frac{\beta}{1-\beta}} \qquad (56) \\ &= \left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1 \right) q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}, \end{aligned}$$

wobei $Q(\tau)$ die durchschnittliche Qualität zum Zeitpunkt der Erfindung von Varietät j ist.

Für die Qualität der zuletzt erfundenen Varietät, $q_{\Omega(A)}$, gilt

$$q_{\Omega(A)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}(A,t) = \left[\lambda^0 Q(t)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \right]^{\frac{\beta}{1-\beta}} = Q(t),$$

weil für diese noch keine Qualitätsverbesserungen stattgefunden haben können.

Wegen (4) ist außerdem

$$\int_0^{A(t)} q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}} dj = A(t)Q(t).$$

Mit diesen Gleichungen folgt

$$\dot{Q}(t) = \frac{\left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right) I(t) \int_0^{A(t)} q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}} dj}{A(t)} + \frac{\dot{A}(t)Q(t)A(t)}{[A(t)]^2} - \frac{\dot{A}(t)Q(t)A(t)}{[A(t)]^2}.$$

Das Integral ist wieder gleich $A(t)Q(t)$. Weil sich die letzten beiden Terme auf der rechten Seite genau aufheben, ergibt sich Gleichung (13).

Appendix: Herleitung der Wachstumsrate des Wertpapierbestands

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass der Wertpapierbesitz der privaten Haushalte mit der gleichen Rate wie der Output wächst. Der Wertpapierbestand setzt sich zusammen aus den Firmenanteilen der Ökonomie und dem Kapitalbestand, K, den die Endprodukthersteller in der Produktion einsetzen. Der Wert der Zwischenprodukthersteller resultiert aus den Gewinnen, die sie durch ihre marktbeherrschende Stellung erwirtschaften können, und spiegelt sich in den Patentwerten P_A wider. Der Wertpapierbestand lautet

$$\nu(t) = K(t) + A_v(t)\bar{P}_{A,v}(t) + A_q(t)\bar{P}_{A,q}(t). \tag{57}$$

A_v und A_q geben jeweils die Anzahl der Kapitalguthersteller an, die Kapitalgüter in der Basis-Qualität herstellen (A_v), bzw. die bereits mindestens eine Verbesserung gemacht haben (A_q). $\bar{P}_{A,v}$ und $\bar{P}_{A,q}$ sind die Durchschnittswerte der Patente der jeweiligen Firmen.

Im Folgenden wird gezeigt, dass im Steady state jeder Term auf der rechten Seite der Gleichung mit der Rate g_Y wächst. Damit wächst auch der Bestand an Wertpapieren, ν, mit dieser Rate.

Dazu wird in einem ersten Schritt gezeigt, dass die Anteile A_v und A_q mit der Rate g_A wachsen. In einem zweiten Schritt folgt der Beweis, dass die durchschnittlichen Patentwerte (Firmenwerte), $P_{A,v}$ und $P_{A,q}$, mit der Rate $g_Y - g_A$ wachsen. Die Wachstumsrate der beiden rechten Terme ist dann g_Y.

Dass der aggregierte Kapitalstock auch mit g_Y wächst, wurde weiter oben bereits gezeigt (siehe Gleichung (29) mit $r =$ konst.).

Die Veränderung von A_v beruht auf zwei Ursachen: Zum einen kommen durch gezielte Forschung neue Produktlinien hinzu. Zum anderen werden Kapitalgüter in der Basis-Qualität durch Qualitäten-Forschung verbessert und gehören nicht mehr zu A_v, sondern zu A_q. Dies passiert mit einer Wahrscheinlichkeit von I: $\dot{A}_v = \dot{A} - IA_v$. Teilen durch A auf beiden Seiten ergibt:

$$\frac{\dot{A}_v}{A} = g_A - I\frac{A_v}{A}.$$

Ableiten des Verhältnisses A_v/A nach der Zeit und Einsetzen der letzten Gleichung ergibt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{A_v}{A}\right) = g_A - (I + g_A)\frac{A_v}{A}.$$

Aus dieser Gleichung wird deutlich, dass das Verhältnis der Hersteller von Basis-Qualitäten an der Gesamtzahl der Produzenten gegen einen konstanten Wert konvergiert: Für kleine Werte von A_v/A ist die Gleichung positiv, der Anteil steigt. Für große A_v/A ist sie negativ, der Anteil fällt.[12] Der Steady-state-Wert lautet:

$$\frac{A_v}{A} = \frac{g_A}{I + g_A}.$$

Damit muss A_v mit der gleichen Rate wie A wachsen. Weil $A = A_v + A_q$ und folglich

$$1 = \frac{A_v}{A} + \frac{A_q}{A}$$

gilt, wächst natürlich auch A_q mit der Rate g_A. Der rechte Term der letzten Gleichung wäre sonst nicht konstant. Zusammen folgt:

$$\frac{\dot{A}_v}{A_v} = \frac{\dot{A}_q}{A_q} = g_A. \tag{58}$$

Der durchschnittliche Wert von Firmen, die erfolgreich Qualitäten-Forschung betrieben haben, beträgt

$$\bar{P}_{A,q}(t) = \frac{1}{A_q(t)} \int_0^{A(t)} P_{A,q}(j,t)dj.$$

Dieser Durchschnittswert ändert sich aus zwei Gründen: Erstens ändert sich jeder Patentwert auch ohne eine erfolgreiche Innovation, weil das technische

[12] Im Steady state sind g_A und I konstant (vgl (13)). Die Differentialgleichung ist deshalb zeitautonom und einfach zu lösen.

Wissen zunimmt, wie es in Gleichung (41) ersichtlich ist. Die Änderungsrate ist dabei für jedes Patent gleich. Zweitens passieren in einzelnen Produktlinien Qualitätsverbesserungen. Dadurch steigen die Gewinne (siehe Gleichung (25)) sprunghaft und ebenso die Patentwerte.[13] In der folgenden Gleichung sind beide Effekte durch die beiden Terme auf der rechten Seite ausgedrückt. Der erste Term auf der rechten Seite steht für den ersten Effekt, der zweite für den zweiten Effekt:

$$\frac{\dot{\bar{P}}_{A,q}(t)}{\bar{P}_{A,q}(t)} = \frac{\dot{P}_{A,q}(t)}{P_{A,q}(t)} + \frac{\int_0^{A(t)} \Delta P_{A,q}(j,t) I dj}{\int_0^{A(t)} P_{A,q}(j,t) dj}, \tag{59}$$

wobei $\Delta P_{A,q}(j,t) \equiv P_{A,\Omega(j)+1}(j,t) - P_{A,\Omega(j)}(j,t)$ definiert wurde. Der Wert eines Patents entspricht dem Barwert aller künftigen Gewinne aus (25). Damit folgt:

$$\begin{aligned} \Delta P_{A,q}(j,t) &= \int_t^\infty \left[\pi_{\Omega(j)+1}(\tau) - \pi_{\Omega(j)}(\tau)\right] e^{-(r+I)(\tau-t)} d\tau \\ &= \int_t^\infty r \frac{1-\beta}{\beta} \left(\frac{Y}{L_Y^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} (AQ)^{-\frac{1}{\beta}} \left[q_{\Omega(j)+1}^{\frac{\beta}{1-\beta}} - q_{\Omega(j)}^{\frac{\beta}{1-\beta}}\right] e^{-(r+I)(\tau-t)} d\tau. \end{aligned}$$

Mit (56) ergibt sich für die Differenz der Patentwerte zweier direkt benachbarten Qualitätsstufen:

$$\Delta P_{A,q}(j,t) = \left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right) P_{A,q}(j,t). \tag{60}$$

Einsetzen der letzten Gleichung in den rechten Bruch in (59) liefert mit (13)

$$\frac{\int_0^{A(t)} \Delta P_{A,q}(j,t) I dj}{\int_0^{A(t)} P_{A,q}(j,t) dj} = \frac{\left(\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1\right) I \int_0^{A(t)} P_{A,q}(j,t) dj}{\int_0^{A(t)} P_{A,q}(j,t) dj} = g_Q.$$

Für den ersten Bruch auf der rechten Seite von (59) erhält man über (41) die Wachstumsrate. Wie oben bereits gezeigt, wächst der Lohnsatz mit der Rate des Pro-Kopf-Outputs: $\dot{w}/w = \dot{y}/y = \dot{Y}/Y - n$. Für B_q gilt:

$$\frac{\dot{B}_q}{B_q} = \phi_q \frac{\dot{A}}{A} + \delta_q \frac{\dot{Q}}{Q}.$$

[13] Zu berücksichtigen ist eigentlich noch einerseits, dass sich die obere Integrationsgrenze, $A(t)$, nach außen verschiebt. Andererseits wächst auch der Anteil A_q, über den gemittelt wird. Beide Effekte heben sich aber exakt auf, wie oben in Gleichung (58) gezeigt wurde.

Zusammen mit (15) folgt

$$\frac{\dot{P}_{A,q}(t)}{P_{A,q}(t)} = g_Y - g_A - g_Q.$$

Insgesamt ergibt sich für die Entwicklung des durchschnittlichen Patentwertes $\bar{P}_{A,q}(t)$:

$$\frac{\dot{\bar{P}}_{A,q}(t)}{\bar{P}_{A,q}(t)} = g_Y - g_A. \tag{61}$$

Weil A_q mit der Rate g_A wächst, ist bewiesen, dass $A_q(t)\bar{P}_{A,q}(t)$ in (57) mit g_Y wächst.

Schließlich ist noch zu zeigen, dass der durchschnittliche Wert der Basis-Qualitäten-Hersteller, $\bar{P}_{A,v}(t)$, auch mit $g_Y - g_A$ wächst. Definitionsgemäß ändert sich der Wert eines solchen Patents nur wegen allgemeinem technischem Fortschritt gemäß Gleichung (45). Einsetzen von

$$\frac{\dot{B}_v}{B_v} = \phi_v \frac{\dot{A}}{A} + \delta_v \frac{\dot{Q}}{Q}$$

und (11) liefert

$$\frac{\dot{\bar{P}}_{A,v}(t)}{\bar{P}_{A,v}(t)} = g_Y - g_A. \tag{62}$$

Gemäß (58) wächst A_v mit Rate g_A. Das Produkt $A_v(t)\bar{P}_{A,v}(t)$ in (57) wächst darum mit g_Y.

Damit ist bewiesen, dass jeder einzelne Term in der Gleichung für den Wertpapierbestand, (57), mit g_Y wächst. Damit folgt

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu} = g_Y.$$

Appendix: Beweis, dass $r > D_{1/2}$ gilt

In diesem Abschnitt wird bewiesen, dass $1 - D_{1/2}/r > 0$ bzw. $r > D_{1/2}$ gilt. Zunächst zum Beweis für D_1.

Einsetzen der Ramsey-Regel (mit $\dot{c}/c = \dot{y}/y$) und der Definition von D_1, Gleichung (53), in $r > D_1$ ergibt

$$\sigma \frac{\dot{y}}{y} + \rho > \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{B}_q}{B_q} - I. \tag{63}$$

Aus Gleichung (21) folgt $\dot{w}/w = \dot{y}/y$. Logarithmisches Differenzieren von Definition (39) liefert:

$$\frac{\dot{B}_q}{B_q} = \phi_q g_A + \delta_q g_Q.$$

Unter Verwendung dieser beiden Gleichungen und Gleichungen (13) und (15) ergibt sich für (63):

$$\rho - n + g_A + g_Q + \frac{g_Q}{\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1} > (1-\sigma)\frac{\dot{y}}{y}.$$

Die Gültigkeit dieser Restriktion wird durch die Beschränkung aus der Transversalitätsbedingung (51) impliziert, weil g_A und g_Q wegen der Einschränkung aus (19) positiv sind und $\lambda^{\beta/(1-\beta)} > 1$ ist:

$$\rho - n + g_A + g_Q + \frac{g_Q}{\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1} > \rho - n > (1-\sigma)\frac{\dot{y}}{y}.$$

Damit ist bewiesen, dass unter den gemachten Restriktionen (19) und (51) die Aussage $r > D_1$ wahr ist.

Der Beweis für $r > D_2$ verläuft analog. Der entsprechende Ausdruck für (63) lautet:

$$\sigma\frac{\dot{y}}{y} + \rho > \frac{\dot{w}}{w} + \frac{\dot{Q}}{Q} - \frac{\dot{B}_v}{B_v} - I.$$

Aus Definition (37) ergibt sich:

$$\frac{\dot{B}_v}{B_v} = \phi_v g_A + \delta_v g_Q.$$

Zusammen mit Gleichungen (11) und (13) und mit $\dot{w}/w = \dot{y}/y$ resultiert:

$$\rho - n + g_A + \frac{g_Q}{\lambda^{\frac{\beta}{1-\beta}} - 1} > (1-\sigma)\frac{\dot{y}}{y}.$$

Diese Bedingung wird ebenfalls durch die Parameterbeschränkung aus der Transversalitätsbedingung, Ungleichung (51), impliziert. Damit gilt $r > D_2$ ebenso.

Literatur

Barro, R. J. & Sala-i-Martin, X. (2004), *Economic Growth*, 2. Auflage, MIT Press.

Dinopoulos, E. & Sener, F. (2006), New directions in Schumpeterian growth theory, *in* H. Hanusch & A. Pyka (Hrsg.), 'Edgar Companion to Neo-Schumpeterian Economics', Edward Elgar.

Grossman, G. M. & Helpman, E. (1991*a*), *Innovation and Growth in the Global Economy*, MIT Press.

Grossman, G. M. & Helpman, E. (1991*b*), 'Quality ladders in the theory of growth', *Review of Economic Studies* **58**, S.43–61.

Jones, C. I. (1995*a*), 'R&D-based models of economic growth', *Journal of Political Economy* **103**, S.759–784.

Jones, C. I. (1995*b*), 'Time series tests of endogenous growth models', *Quarterly Journal of Economics* **110**, S.495–525.

Li, C.-W. (2000), 'Endogenous vs. semi-endogenous growth in a two-R&D-sector model', *The Economic Journal* **110**, S.110–122.

Romer, P. M. (1990), 'Endogenous technological change', *Journal of Political Economy* **98**, S.71–102.

Solow, R. M. (2005), Reflections on growth theory, *in* P. Aghion & S. N. Durlauf (Hrsg.), 'Handbook of Economic Growth', North Holland, S.3–10.

Tirole, J. (1988), *The Theory of Industrial Organisation*, MIT Press.

Young, A. (1998), 'Growth without scale effects', *Journal of Political Economy* **106**, S.41–63.